

1^{er} Contrôle de Mécanique

Toute bonne présentation sera notée (1pt)

Exercice : (6 points)

Un mobile M décrit une **hélice circulaire** d'axe Oz, définie par les équations, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = h\theta \end{cases} \quad R : \text{rayon de l'hélice ; } h : \text{pas de l'hélice (Ctes)}$$

1°) Le mouvement est défini par la loi $\theta(t) = \omega t$.

a) Déterminer la vitesse du mobile M, et son module. (1pt) (2)

b) Déterminer l'accélération du mobile M. (1pt) (2)

2°) Dans le cas où ω **constante**, que peut-on dire de l'accélération ? (1pt)

a) En déduire l'expression du rayon de courbure ρ de la trajectoire. (1pt)

b) Exprimer la vitesse et l'accélération avec les **coordonnées cylindriques** (en fonction de R, h, et ω). (2pts)

Problème : (13 points)

Une bille M, que l'on peut assimiler à un point matériel de masse m, est mobile sans frottement à l'intérieur d'un tube circulaire de rayon R. Ce tube tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire **constante** $\dot{\alpha} = \omega$. On suppose que le tube est dans le plan xOz du repère fixe $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le repère mobile lié au tube est défini par $\mathcal{R}_1(O, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$. On pose $\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM})$.

1°) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans la base sphérique $\mathcal{R}_{sph}(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ par rapport au repère galiléen \mathcal{R} . (3pts)

2°) Donner l'expression des forces qui s'exercent sur le point M dans \mathcal{R} , en coordonnées sphériques ? (1pt)

3°) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles du mouvement. (2pts)

4°) Résoudre l'équation différentielle dans le cas où θ est faible. (2pts)

Remarque : les conditions initiales sont : à $t = 0$, $\theta = \pi/3$ et $\dot{\theta} = 0$.

5°) Déterminer la force d'inertie d'entraînement. (2pts)

6°) Déterminer la force d'inertie de coriolis. (2pts)

7°) Calculer les travaux W de toutes les forces exercées sur M. (1pt)

- هل أنت عصامي أم عظامي؟؟

العصامي : هو الذي يبني نفسه بنفسه دون الاعتماد على غيره.
أما العظامي: فهو المعتمد عادة على غيره في كل شيء، فهو شخص فاشل.

Correction de CC1 (Mécanique)

Problème: (12pts)

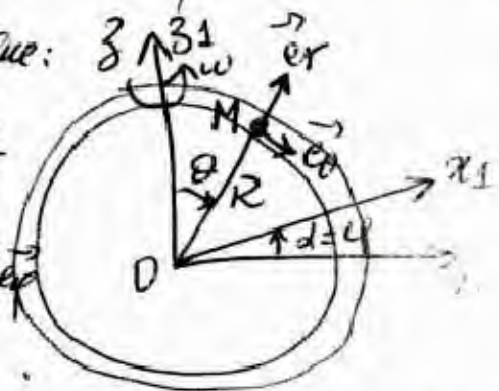
1°/ $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \xrightarrow[\vec{z}_3]{\omega = d = \text{cte}} \mathcal{R}_1(0, \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1}) \xrightarrow[\vec{e}_y]{\theta} \mathcal{R}(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

La vitesse par rapport à \mathcal{R} dans la base sphérique:

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} / \mathcal{R} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} = R \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_y = \omega \cos\theta \vec{e}_r - \omega \sin\theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta + R\omega \sin\theta \vec{e}_y} \quad (1,5 \text{ pts})$$



$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} / \mathcal{R} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R\dot{\theta} \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta + R\omega \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_y + R\omega \sin\theta \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_y \\ &= (-R\ddot{\theta} - R\omega^2 \sin^2\theta) \vec{e}_r + (R\ddot{\theta} - R\omega^2 \sin\theta \cos\theta) \vec{e}_\theta + 2R\omega \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_y \end{aligned} \quad (1,5 \text{ pts})$$

2°/ Les forces dans \mathcal{R} : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z = -mg \cos\theta \vec{e}_r + mg \sin\theta \vec{e}_\theta$ (1pt)

$$\vec{R} \perp \vec{e}_\theta = R_r \vec{e}_r + R_y \vec{e}_y$$

3°/ P.F.D: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} = m \vec{\gamma}$

$$\begin{cases} -mg \cos\theta + R_r = -mR\ddot{\theta} - mR\omega^2 \sin^2\theta & (1) \\ mg \sin\theta = mR\ddot{\theta} - mR\omega^2 \sin\theta \cos\theta & (2) \\ R_y = 2mR\omega \dot{\theta} \cos\theta & (3) \end{cases} \quad (2 \text{ pts})$$

4°/ Equation différentielle en θ : (2) $\Rightarrow \ddot{\theta} - (\omega^2 + \frac{g}{R}) \cdot \theta = 0$

car θ faible $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$

$$\theta = e^{dt} \Rightarrow d^2 \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) = 0 \Rightarrow d = \pm \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\theta = A e^{\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{R}} t} + B e^{-\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{R}} t}} \quad \text{à } t=0 \begin{cases} \theta = \pi/3 = A+B \\ \dot{\theta} = 0 \Rightarrow A=B \end{cases} \Rightarrow A=B = \pi/6$$

$$\text{donc } \boxed{\theta = \frac{\pi}{3} \cosh \sqrt{\omega^2 + \frac{g}{R}} t}$$

5°/ $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e$

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

avec $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \ddot{\theta} \vec{e}_y + \dot{\theta} (\omega \cos\theta \vec{e}_r - \omega \sin\theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_y) \wedge \vec{e}_y + \frac{d}{dt} (\omega \vec{e}_z)$

Donc $\vec{F}_{ie} = mR(\ddot{\theta} + \omega^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r - mR(\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta - 2mR\omega \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\phi$ (2pts)
 $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ ($\vec{V}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R_{sph}} = \dot{R} \vec{e}_r = \vec{0}$) (1pt)
 $= \vec{0}$

2°/ $W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{OM} = (-mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot R \vec{e}_r = -mgR \cos \theta$

$W_{\vec{P}} = \vec{R} \cdot \vec{OM} = (Rr \vec{e}_r + R\varphi \vec{e}_\varphi) \cdot R \vec{e}_r = R \cdot Rr$ (1pt)

$W_{\vec{F}_{ie}} = mR^2(\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)$

$W_{\vec{F}_{ic}} = 0$

Exercice: (8pts)

1°/ a) $\vec{OM} \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ h \theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} -R\omega \sin \theta \\ R\omega \cos \theta \\ h\omega \end{cases} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \omega \sqrt{R^2 + h^2}$ (2pts)

$\Rightarrow \vec{\gamma} \begin{cases} -R\omega^2 \cos \theta - R\dot{\omega} \sin \theta \\ -R\omega^2 \sin \theta + R\dot{\omega} \cos \theta \\ h\dot{\omega} \end{cases}$ (2pts)

2°/ $\omega = cte \Rightarrow v = cte \Rightarrow \gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0$ et $\gamma = \gamma_n = R\omega^2$ (est normale) (1pt)

a) $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{R^2 + h^2}{R}$ (1pt)

b) $\vec{OM} = R \cos \theta \vec{e}_x + R \sin \theta \vec{e}_y + h\theta \vec{e}_z$
 $= R(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + h\theta \vec{e}_z$
 $= R \vec{e}_\rho + h\theta \vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{V} = R \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + h\omega \vec{e}_z = R\omega \vec{e}_\theta + h\omega \vec{e}_z$
 $= R\omega \vec{e}_\theta + h\omega \vec{e}_z$

$\vec{\gamma} = R\omega \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + 0 = -R\omega^2 \vec{e}_\rho$ (2pts)

